

## Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln.<sup>1)</sup>

Von HERBERT WAGNER in Berlin.

In dieser Arbeit wird das nichtstationäre ebene Problem der Bewegung eines Körpers mit einer Kante in Flüssigkeit behandelt.

Ursprünglich sei dieser Körper und die als unzusammendrückbar und reibungsfrei vorausgesetzte Flüssigkeit in Ruhe, dann werde der Körper in Bewegung gesetzt. Aus der Bedingung, daß die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im ganzen zeitlichen Verlauf des Bewegungsvorganges an der Kante des Körpers endlich sein muß, ergibt sich die Ablösung einer Helmholtzschen Unstetigkeitsfläche von der Kante des Körpers und die Entstehung einer Zirkulation um den Körper<sup>2)</sup>. Diese Unstetigkeitsfläche wird für den Fall der Bewegung einer ebenen Platte, deren Vorderkante gerundet gedacht ist und deren Anstellwinkel als klein vorausgesetzt wird, berechnet.

Es wird ferner gezeigt, welche Kraftwirkung ein in der Flüssigkeit bewegter Körper erfährt, wenn Wirbel vorhanden sind (nichtstationäres räumliches Problem). Diese Kraftwirkung ist im allgemeinen von der Kontur und der Geschwindigkeit des Körpers, sowie von der Lage, Geschwindigkeit und Wirbelstärke der Wirbel abhängig. Sind jedoch beim ebenen Problem die Wirbel hinreichend (unendlich) weit vom Körper entfernt, so ist diese Kraft von der Kontur des Körpers unabhängig; der Körper erfährt dann den bereits von Lord Kelvin berechneten dynamischen Auftrieb  $P_z = \rho \Gamma v_r$ . Hierin bedeutet  $P_z$  die Auftriebskraft pro Längeneinheit (Auftriebsdichte),  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit,  $\Gamma$  die Zirkulation um den Körper,  $v_r$  die relative Geschwindigkeit zwischen dem Schwerpunkt der Wirbelfäden und dem Körper. Die Flüssigkeitsbewegung darf daher nicht als stationär vorausgesetzt werden (denn das würde bedeuten, daß man  $v_r = 0$  setzt)<sup>3)</sup>.

Die Kraftwirkung, welche die Platte erfährt, wird als Funktion des von der Platte zurückgelegten Weges berechnet; dabei wird die im allgemeinen zeitlich veränderliche Geschwindigkeit der Platte als gegeben vorausgesetzt. Diese Berechnung wird für den Fall der plötzlich mit dann konstant bleibender Geschwindigkeit in Bewegung gesetzten Platte und für den Fall der mit konstanter Beschleunigung bewegten Platte zahlenmäßig ausgewertet. Im ersten Fall ergibt sich, daß (nach dem Auftreten einer impulsiven Kraft bei Erzeugung der Bewegung) der Auftrieb kurz nach Beginn der Bewegung halb so groß ist wie nach unendlich langer Bewegung, im Verlauf der Bewegung stetig steigt und sich asymptotisch letzterem Wert nähert. Von der Berechnung des Bewegungswiderstandes, der bei unendlich kleinem Anstellwinkel unendlich klein von zweiter Ordnung ist, wurde abgesehen.

Schließlich wird besprochen, wie weit die Flüssigkeitsreibung die besprochenen Bewegungszustände wesentlich abändert.

Die in der bisherigen Literatur behandelten Probleme von Unstetigkeitsflächen<sup>4)</sup> beziehen sich auf stationäre Vorgänge (vergl. z. B. die von Prandtl und seinen Nachfolgern behandelten »begleitenden« Unstetigkeitsflächen bei Tragflügeln von endlicher Länge). Der Verfasser hat demgegenüber versucht, die Entstehung von Unstetigkeitsflächen in reibungsfreier Flüssigkeit vom Anbeginn der Bewegung (nichtstationärer Zustand),

<sup>1)</sup> Auszug aus der von der Technischen Hochschule Berlin angenommenen Dr.-Ing.-Dissertation des Verfassers. Referenten: Prof. Dr.-Ing. Hoff und Prof. Dr. Hamel. Vorgetragen auf der Versammlung in Innsbruck am 26. September 1924.

<sup>2)</sup> Zur Erklärung der Entstehung der Auftriebskraft, die ein solcher Körper erfährt, brauchen wir daher die Flüssigkeitsreibung nicht heranzuziehen.

<sup>3)</sup> R. Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges, Braunschweig 1917, S. 108, setzt die relative Geschwindigkeit zwischen Wirbelfäden und Tragflügel gleich Null. Dies ist mit Obigem nicht verträglich. Die Feststellung Grammels, daß der abgelöste Wirbelfaden eine Kraftwirkung erfährt, widerspricht den Helmholtzschen Wirbelsätzen.

<sup>4)</sup> Die Arbeit des Herrn Prof. Prandtl (Vortrag Innsbruck 1922) ist dem Verfasser erst nach Fertigstellung dieser Arbeit bekannt geworden. Vergl. auch W. Birnbaum dieser Zeitschr. 3, S. 290

insbesondere für den Fall eines Tragflügels, zu berechnen. Aus dieser Betrachtung ergibt sich auch für einen Sonderfall zum ersten Mal der rechnerische Nachweis für die Entstehung eines Potentialwirbels.

**1. Allgemeines über die Flüssigkeitsbewegung um einen Körper mit einer Kante.** Wir fassen das ebene (zweidimensionale) Problem der Flüssigkeitsbewegung um einen Körper mit einer Kante ins Auge. Von dem Vorhandensein einer eingepprägten Kraft wird abgesehen. Die Flüssigkeit wird als unzusammendrückbar vorausgesetzt, der Einfluß der Flüssigkeitsreibung vernachlässigt.

Ein ruhender, zylindrischer Körper ohne Kante sei von überall ruhender Flüssigkeit umgeben, die Flüssigkeit nach allen Seiten unendlich ausgedehnt. Da sie überall ruht, ist auch die Rotation der Geschwindigkeit und die Zirkulation in allen geschlossenen Kurven Null.

Der Körper werde jetzt in Bewegung gesetzt; die Bewegung der Flüssigkeit bleibt dann nach den Helmholtz'schen Wirbelsätzen drehungsfrei. Da der Körper keine Kante hat, muß die Flüssigkeitsbewegung stetig bleiben, wie Hadamard<sup>1)</sup> bewiesen hat. Eine Zirkulation kann um den Körper nicht entstehen<sup>2)</sup>. Das stetige und drehungsfreie Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit ist nun durch die Angabe der Bewegung der Grenzen, in unserem Fall durch die Angabe der Geschwindigkeit des Körpers, eindeutig bestimmt<sup>3)</sup>.

Jetzt wollen wir voraussetzen, daß der Körper eine Kante besitzt. Anfänglich seien wieder Körper und Flüssigkeit in Ruhe, dann werde der Körper in Bewegung gesetzt. Würden wir die Flüssigkeitsbewegung wieder als stetig voraussetzen<sup>4)</sup>, so könnte auch in diesem Fall keine Zirkulation entstehen<sup>2)</sup>. Diese eindeutig bestimmte zirkulationsfreie Flüssigkeitsbewegung würde aber (im allgemeinen) an der Kante des Körpers eine unendlich große Geschwindigkeit besitzen<sup>5)</sup>. Einer unendlich großen Geschwindigkeit entspricht jedoch unendlich großer negativer Druck, der in Flüssigkeit nicht auftreten kann.

Wir setzen demnach zur Berechnung der Strömung die Bedingung, daß die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der Kante des Körpers im ganzen zeitlichen Verlauf der Strömung endlich sein soll. Die stetige und drehungsfreie Bewegung der Flüssigkeit besitzt aber eine unendlich große Geschwindigkeit an der Kante des Körpers; wir müssen folglich die Bedingung der Stetigkeit fallen lassen. Dies ist zulässig, da durch die Kante die (hinreichende) Bedingung zur Ablösung einer Unstetigkeitsfläche gegeben ist<sup>6)</sup>. Wir nehmen also die Ablösung einer Unstetigkeitsfläche von der Kante des Körpers an. Die Zirkulation in allen Kurven, welche Körper und Unstetigkeitsfläche vollständig umschließen, muß dabei im ganzen zeitlichen Verlauf der Strömung Null bleiben<sup>2)</sup>.

Zwecks Berechnung der Strömung bilden wir die Strömung um den Körper mit der Kante in einer Weise konform ab, daß die Abbildung der Kontur keine Kante besitzt. Der der Kante  $K$  entsprechende Punkt der Abbildung sei  $K'$ . Da die Vergrößerung durch die Abbildung in diesem Punkt unendlich ist, entspricht jeder endlichen Geschwindigkeit im Punkte  $K'$  im System der Abbildung eine unendlich große Geschwindigkeit an der Kante  $K$  im ursprünglichen System. Die Geschwindigkeit an der Kante  $K$  des Körpers soll endlich sein; folglich setzen wir für den ganzen zeitlichen Verlauf der Strömung die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Punkte  $K'$  der Abbildung gleich Null. Dies gibt uns für jeden Augenblick der Bewegung die Bedingung zur Berechnung der Größe der Unstetigkeit der an der Kante  $K$  entstehenden Unstetigkeitsfläche; die Bewegung der bereits gebildeten Teile der Unstetigkeitsfläche ist entsprechend den Helmholtz'schen Wirbelsätzen berechenbar.

Von einem Körper mit  $n$  Kanten lösen sich  $n$  Unstetigkeitsflächen ab; zur Berechnung dieser Unstetigkeitsflächen müßten wir die  $n$  Bedingungen benutzen, daß an allen  $n$  Kanten des Körpers die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im ganzen zeitlichen Verlauf der Strömung endlich sein muß.

<sup>1)</sup> Hadamard, Leçons hydrodynamiques, Paris 1903, Anhang.

<sup>2)</sup> Lamb, Hydrodynamik, deutsch von Friedel, 1907, S. 44.

<sup>3)</sup> Lamb, l. c. S. 50.

<sup>4)</sup> Wir wollen in dieser Arbeit alle Geschwindigkeitsfelder als »stetig« bezeichnen, die innerhalb der Flüssigkeit stetig sind, gleichgültig, ob an der Grenze der Flüssigkeit (also z. B. an einer Kante des Körpers) die Geschwindigkeit unendlich groß ist oder nicht.

<sup>5)</sup> Helmholtz, Monatsber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. 1868, S. 219.

<sup>6)</sup> Helmholtz, l. c. 1868 S. 217 bis 219.

Es läßt sich vermuten, daß auch beim räumlichen Problem der Bewegung eines Körpers mit einer Kante in reibungsfreier Flüssigkeit die entstehende unstetige Flüssigkeitsbewegung sich eindeutig bestimmt auf Grund der Bedingung berechnen läßt, daß in jedem Augenblick längs der ganzen Kante die Geschwindigkeit der Flüssigkeit endlich ist.

**2. Ansatz für die Berechnung der nichtstationären ebenen Strömung um eine Platte.** Wir setzen voraus, daß die ebene Platte eine reine Translationsbewegung ausführe (sich nicht drehe)<sup>1)</sup>. Zeitliche Aenderungen des Anstellwinkels  $\beta$  der Platte werden also durch Aenderungen in der Richtung der Bahn hervorgerufen.

Die Vorderkante der Platte denken wir uns gerundet und so die unendlich große Geschwindigkeit der Flüssigkeit an dieser Stelle vermieden. Die folgende Berechnung der Strömung um die Platte mit scharfer Vorderkante ist als Näherungslösung für die Strömung um die Platte mit gerundeter Vorderkante gedacht. Die Hinterkante  $K$  der Platte setzen wir jedoch als scharf voraus; wir nehmen die Ablösung einer Unstetigkeitsfläche von dieser Kante an.

Wir bezeichnen sämtliche Größen (Geschwindigkeit, Potential, usw.) im System I der Platte mit kleinen Buchstaben, im System II der Abbildung mit den entsprechenden großen Buchstaben. Zugeordnete Punkte werden in beiden Systemen mit den gleichen großen Buchstaben bezeichnet und im System der Abbildung mit einem Strich versehen.

In Abb. 1 ist ein Stück einer Unstetigkeitsfläche im System I und das entsprechende Stück derselben im System II gezeigt. Die Differenz der Geschwindigkeitspotentiale zweier Punkte gibt die Strömung längs einer die beiden Punkte verbindenden Kurve an. Bezeichnen wir mit  $\varphi$  das Geschwindigkeitspotential, so ist die Zirkulation in einer Kurve, welche das zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  liegende Stück der Unstetigkeitsfläche umschließt, gegeben durch:  $\gamma = (\varphi_{II} - \varphi_I) - (q_2 - q_1)$ . Die Zirkulation  $\Gamma$  in einer Kurve, welche das zwischen den Punkten  $P_1'$  und  $P_2'$  liegende entsprechende Stück der Abbildung der Unstetigkeitsfläche umschließt, ist:  $\Gamma = (\psi_{II} - \psi_I) - (\psi_2 - \psi_1)$ . Für entsprechende Punkte beider Systeme gilt aber beim ebenen Problem der konformen Abbildung:  $\varphi = \psi$ . Folglich:

$$\gamma = \Gamma \dots (1).$$

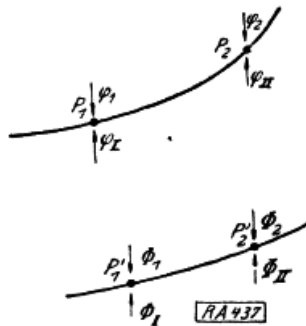


Abb. 1.

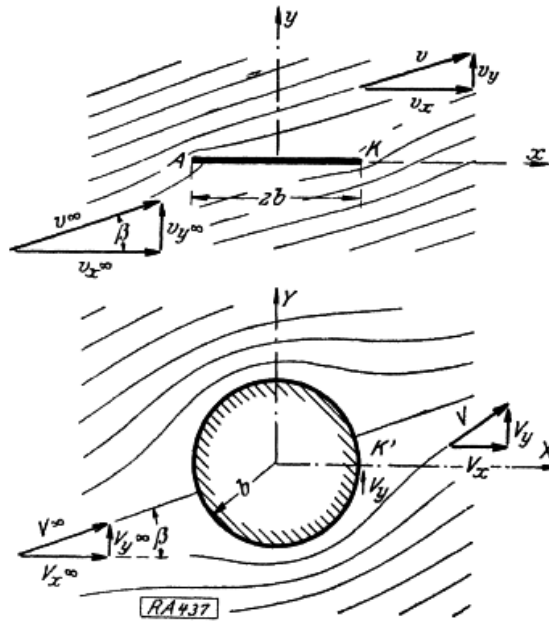


Abb. 2.

Um entsprechende Stücke einer Unstetigkeitsfläche ist daher die Zirkulation in beiden Systemen die gleiche.

Zuerst betrachten wir das bekannte stetige Geschwindigkeitsfeld um die Platte (Abb. 2). Wir denken uns die Platte von der Breite  $2b$  in Ruhe und die Flüssigkeit bewegt. Die Geschwindigkeit  $v_\infty$  der Flüssigkeit im Unendlichen sei gegeben durch ihre beiden Komponenten  $v_{x\infty}$  und  $v_{y\infty}$ . Bezeichnen wir mit  $z = x + iy$  die komplexe

<sup>1)</sup> Bezgl. Translation und Drehung der Platte vergl. § 11.

Koordinaten der Ebene, in der die Flüssigkeitsbewegung um die Platte stattfindet und mit  $v = v_x - i v_y$  die Geschwindigkeit in komplexer Form, so ist das zirkulationsfreie, stetige und drehungsfreie Geschwindigkeitsfeld um die Platte gegeben durch die Gleichung<sup>1)</sup>:

$$v = v_{\infty} - i \frac{2 v_{y\infty}}{\sqrt{z^2 - b^2}}$$

Im Punkte  $K$  ist mit  $z = b$  die Geschwindigkeit der Flüssigkeit unendlich groß.

Wir bilden diese Strömung um die Platte konform in eine Strömung um einen Kreiszyylinder vom Radius  $b$  ab. Die Koordinaten der Abbildung seien mit  $Z = X + i Y$ , die Geschwindigkeiten mit  $V = V_x - i V_y$  bezeichnet. Die abbildende Funktion ist<sup>2)</sup>:

$$Z = z + \sqrt{z^2 - b^2} \dots \dots \dots (2).$$

Die abgebildete Strömung ist durch die Gleichung gegeben<sup>3)</sup>:

$$V = V_{\infty} - \frac{(V_{x\infty} + i V_{y\infty}) b^2}{Z^2}$$

Dabei ist<sup>4)</sup>:

$$V_{\infty} = \frac{1}{2} v_{\infty}$$

Für die Geschwindigkeit im Punkte  $K'$  ( $Z = b$ ) erhalten wir:

$$V_x = 0, \quad V_y = v_{y\infty} = v_{\infty} \sin \beta \dots \dots \dots (3).$$

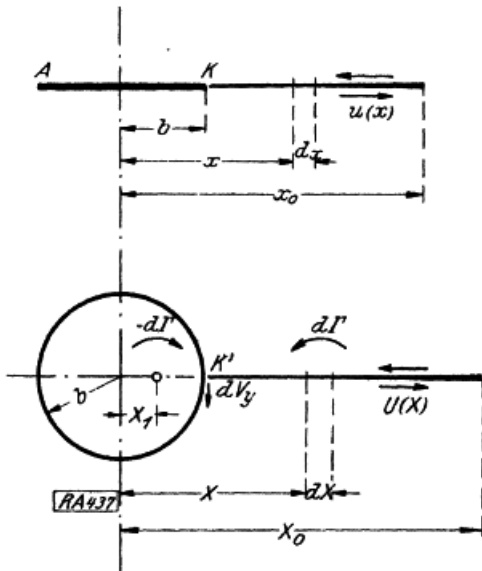


Abb. 3.

Wir betrachten nun folgendes Geschwindigkeitsfeld (Abb. 3). Die Platte und die Flüssigkeit im Unendlichen seien in Ruhe. Von der Kante  $x$  der Platte gehe in Richtung der  $x$ -Achse eine Unstetigkeitsfläche bis zum Punkte  $x_0$ . Die Größe der Unstetigkeit (den Betrag des Flächenrotors der Geschwindigkeit) bezeichnen wir mit  $u$ ; wir denken uns  $u$  als Funktion von  $x$  gegeben:  $u = u(x)$ . Die Zirkulation in einer die Platte und die Unstetigkeitsfläche umschließenden Kurve sei Null.

Den Punkten der  $x$ -Achse entsprechen im abgebildeten System nach Gl. (2) die Punkte:

$$X = x + \sqrt{x^2 - b^2}, \quad Y = 0 \quad (4).$$

Die Abbildung der Unstetigkeitsfläche liegt folglich auf der  $X$ -Achse. Die Größe der Unstetigkeit sei mit  $U$  bezeichnet:  $U = U(X)$ . Die Geschwindigkeit  $dV_y$ , die ein Wirbelfaden an der Stelle  $X$ ,  $Y = 0$  mit der Zirkulation

$d\Gamma$  im Punkte  $K'$  bedingt, ist gegeben durch die Gleichung (vergl. Abb. 3).

$$dV_y = -\frac{1}{2\pi} \left( \frac{d\Gamma}{X-b} + \frac{d\Gamma}{b-X_1} \right)$$

wobei<sup>5)</sup>

$$X_1 = b^2/X \dots \dots \dots (5).$$

Dies eingesetzt ergibt:

$$dV_y = -\frac{d\Gamma}{2\pi b} \cdot \frac{X+b}{X-b}$$

Wir erhalten damit für die Geschwindigkeit  $V_y$ , welche die von  $X = b$  bis  $X = X_0$  reichende Unstetigkeitsfläche im Punkte  $K'$  bedingt (da  $d\Gamma = U dX$ ):

$$V_y = -\frac{1}{2\pi b} \int_{X=b}^{X=X_0} \frac{X+b}{X-b} U(X) \cdot dX.$$

<sup>1)</sup> Gammell, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges, Braunschweig 1917 S. 58, Gl. (8).  
<sup>2)</sup> Gammell, l. c. S. 57, Gl. (3). — <sup>3)</sup> Gammell, l. c. S. 53, Gl. (8).  
<sup>4)</sup> Gammell, l. c. S. 57, Gl. (6). — <sup>5)</sup> Gammell, l. c. S. 28, Zelle 7.

Nun schreiben wir nach Gl. (4):  $X = x + \sqrt{x^2 - b^2}$ ; ferner nach Gl. (1):  $UdX = udx$ . Wir erhalten dann nach entsprechender Aenderung der Grenzen des Integrals für die Geschwindigkeit  $V$ , im Punkte  $K'$ :

$$V_v = -\frac{1}{2\pi b} \int_{x=b}^{x=x_0} \sqrt{\frac{x+b}{x-b}} u(x) dx \dots \dots \dots (6).$$

Wir überlagern die Strömung Abb. 2 und Abb. 3. Soll die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Punkte  $K'$  der Abbildung im betrachteten Augenblick Null sein, so muß nach Gl. (3) und Gl. (6) gelten:

$$v_\infty \sin \beta = \frac{1}{2\pi b} \int_{x_0}^b \sqrt{\frac{x+b}{x-b}} u(x) dx \dots \dots \dots (7).$$

Wir nehmen nun an, daß der Anstellwinkel  $\beta$  der Platte sehr klein (unendlich klein) sei. Aus der folgenden Betrachtung ergibt sich, daß bei sehr kleinem (unendlich kleinem) Anstellwinkel  $\beta$ , also sehr kleinem (unendlich kleinem)  $v_\infty$ , die Größe der Unstetigkeit sehr klein (unendlich klein) wird. Denken wir uns die Unstetigkeitsfläche aus lauter Wirbelfäden bestehend, so bewegen sich diese Wirbelfäden entsprechend obiger Annahme (sehr angenähert) mit der Geschwindigkeit  $v_\infty$ , denn die Geschwindigkeit, die durch die Unstetigkeitsfläche bedingt wird, ist entsprechend dieser Annahme vernachlässigbar klein gegenüber der Geschwindigkeit  $v_\infty$  (dies gilt für alle Punkte mit Ausnahme des Punktes  $K$ ).

Denken wir uns jetzt die Flüssigkeit im Unendlichen ruhend und die Platte bewegt, so können wir entsprechend obiger Annahme des unendlich kleinen Anstellwinkels die Wirbelfäden als ruhend voraussetzen.

Wir führen nun entsprechend Abb. 4 andere Bezeichnungen ein. Die Platte bewege sich mit der Geschwindigkeit  $v_p$  in Richtung der  $s$ -Achse. Der zeitlich veränderliche Abstand vom Ursprung bis zur Kante  $K$  sei mit  $s$  bezeichnet;  $s_0$  gebe die Lage der Kante

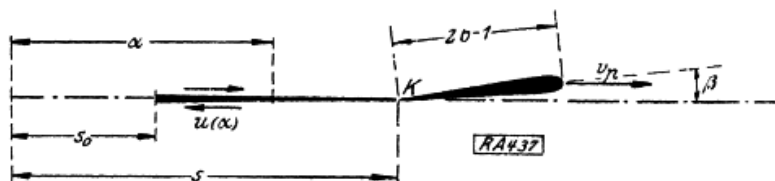


Abb. 4.

$K$  bei Beginn der Bewegung.  $\alpha$  bezeichne die zeitlich unveränderlichen Lagen der einzelnen Wirbelfäden;  $u(\alpha)$  sei die Größe der Unstetigkeit an der Stelle  $\alpha$ . Ohne die Allgemeinheit der Aufgabe zu beeinträchtigen, können wir die Plattenbreite  $2b$  gleich 1 setzen<sup>1)</sup>. Mit diesen Bezeichnungen geht Gl. (7) über in:

$$v_p \sin \beta = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^s \sqrt{\frac{1+s-\alpha}{s-\alpha}} u(\alpha) d\alpha \dots \dots \dots (8).$$

$v_p$  und  $\beta$  denken wir uns als Funktion von  $s$  gegeben.  $u(\alpha)$  ist so zu bestimmen, daß Gl. (8) für alle Werte von  $s$  erfüllt wird.

**3. Lösung der Integralgleichung für den Beginn der Bewegung.** Wir untersuchen den Bewegungsvorgang um den Tragflügel, so lange der von diesem zurückgelegte Weg kleiner ist als die Plattenbreite:  $(s - s_0) \leq 1$ . Wir setzen ferner  $s_0 = 0$ . Wir nehmen noch an, daß  $v_p \sin \beta$  endlich sei und innerhalb dieses Bereiches in der Form gegeben sei:

$$v_p \sin \beta = \sum_{n=0}^{n=N} a_n \sqrt{s^n}$$

<sup>1)</sup> Auf die Bewegungsvorgänge bei anderen Plattenbreiten schließen wir mit Hilfe des allgemeinen dynamischen Ähnlichkeitsgesetzes.

$n$  seien ganze Zahlen,  $a_n$  beliebig gegebene Koeffizienten. Wir wollen jetzt zeigen, daß sich bei dieser Angabe für  $u(\alpha)$  für  $0 \leq \alpha \leq 1$  schreiben läßt:

$$u(\alpha) = \sum_{m=0}^{m=\infty} c_m \sqrt{\alpha^{m-1}} \dots \dots \dots (9).$$

Wir setzen daher entsprechend Gl. (9):

$$v_p \sin \beta = \sum_{n=0}^{n=N} a_n \sqrt{s^n} = 1/\pi \sum_{m=0}^{m=\infty} c_m \int_0^s \frac{\sqrt{1+s-\alpha}}{\sqrt{s-\alpha}} \sqrt{\alpha^{m-1}} \cdot d\alpha.$$

Da für  $(s - \alpha)$  entsprechend den Voraussetzungen  $0 \leq (s - \alpha) \leq 1$  gilt, schreiben wir:

$$\sqrt{1+s-\alpha} = \sum_{p=0}^{p=\infty} C_p (\sqrt{s-\alpha})^{2p}$$

$C_p$  sind bekannte Koeffizienten. Wir erhalten damit

$$v_p \sin \beta = \sum_{n=0}^{n=N} a_n \sqrt{s^n} = 1/\pi \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{m=0}^{m=\infty} C_p c_m \int_0^s (\sqrt{s-\alpha})^{2p-1} \sqrt{\alpha^{m-1}} \cdot d\alpha \quad (10).$$

Substituieren wir für  $\alpha = s \sin^2 \varepsilon$ , so ist

$$\int_0^s (\sqrt{s-\alpha})^{2p-1} \sqrt{\alpha^{m-1}} \cdot d\alpha = 2(\sqrt{s})^{m+2p} \int_0^{\pi/2} \sin^m \varepsilon \cdot \cos^{2p} \varepsilon \cdot d\varepsilon = 2(\sqrt{s})^{m+2p} \cdot J_{m, 2p}.$$

Hierin ist  $J_{m, 2p}$  eine nur von  $m$  und  $2p$  abhängige, bekannte Konstante. Setzen wir dies in Gl. (10) ein, so erhalten wir durch Gleichsetzung der Koeffizienten der gleichen Potenzen von  $\sqrt{s}$  (nach längerer Rechnung) die Lösung in Form von konvergenten Reihen:

Bei der Bewegung der Platte mit dem Anstellwinkel  $\beta$  und der Geschwindigkeit  $v_p$ :

$$v_p \sin \beta = \sum_{n=0}^{n=N} a_n \sqrt{s^n},$$

entsteht eine Unstetigkeitsfläche mit der Unstetigkeit

$$u(\alpha) = \pi/2 \sum_{n=0}^{n=N} a_n \sqrt{\alpha^{n-1}} \left( \int_0^{\pi/2} \sin^n \varepsilon d\varepsilon \right)^{-1} \left[ 1 + \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{D_q \cdot \alpha^q}{2^q \cdot q! (n+1)(n+3) \dots (n+2q-1)} \right] \quad (11).$$

Bezeichnen wir mit:

$$F(r) = (2r-1) \cdot (2r-3)^2 \cdot (2r-5)^2 \cdot \dots \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2$$

$$F(0) = 1, \quad F(1) = 1$$

so läßt sich  $D_q$  aus der Rekursionsformel berechnen:

$$D_q = (-1)^q \sum_{r=0}^{r=q-1} \binom{q}{r} F(q-r) |D_r| \quad \text{mit} \quad D_0 = 1, \quad D_1 = -1.$$

Einige Werte von  $D_q$  seien angegeben (die größeren Werte sind abgerundet)<sup>1)</sup>:

$D_1 = -$	1	$D_6 = +$	11 426 445
$D_2 = +$	5	$D_7 = -$	1 578 702 · 10 <sup>3</sup>
$D_3 = -$	69	$D_8 = +$	301 049 · 10 <sup>6</sup>
$D_4 = +$	2 121	$D_9 = -$	76 108 · 10 <sup>9</sup>
$D_5 = -$	122 025	$D_{10} = +$	24 155 · 10 <sup>12</sup>

Für die plötzlich mit konstanter Geschwindigkeit bewegte und für die mit konstanter Beschleunigung bewegte Platte sind  $v_p \sin \beta$ ,  $u(\alpha)$  und die Zirkulation um den

Tragflügel  $\gamma(s) = \int_0^s u(\alpha) d\alpha$  für  $s$  bzw.  $\alpha \leq 1$  in Abb. 5 und 6 dargestellt.

<sup>1)</sup> Zur Ausführung der zahlenmäßigen Rechnungen hat mir das mathematische Seminar der Technischen Hochschule zu Berlin eine Rechenmaschine zur Verfügung gestellt, wofür ich auch an dieser Stelle meinen verbindlichen Dank ausspreche.

**4. Näherungslösung für beschleunigte Bewegung.** Wir setzen in Gl. (8)  $s_0 = 1$  und für  $\alpha \geq 1: u(\alpha) = \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\right)^m$ . Die Geschwindigkeit  $v_p \sin \beta$ , bei der diese Unstetigkeitsfläche entsteht, bezeichnen wir mit dem Index »m«; also

$$(v_p \sin \beta)_m = \frac{1}{\pi} \int_1^s \frac{\sqrt{1+s-\alpha}}{\sqrt{s-\alpha}} \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\right)^m d\alpha \quad (12)$$

Das Integral der rechten Seite ist mit Hilfe der konvergenten Reihenentwicklung

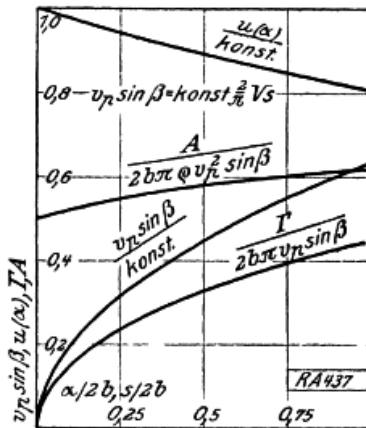


Abb. 5.

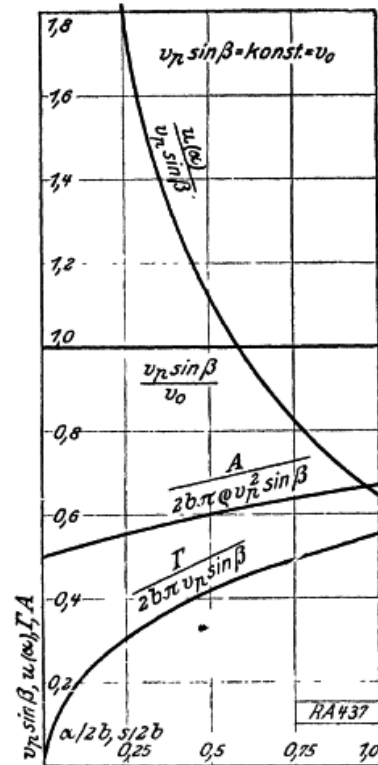


Abb. 6.

$$\sqrt{1+s-\alpha} = \sqrt{1+s} \sum_{r=0}^{\infty} c_r \left(\frac{\alpha}{1+s}\right)^r \quad (13)$$

lösbar. Die Geschwindigkeiten  $(v_p \sin \beta)_m$  sind für ganzzahlige, ungerade Werte von  $m \geq 1$  in Abb. 7 dargestellt.

Einige Zahlenwerte sind in der Zahlentafel I (vergl. S. 24) angegeben. Für gerade Werte von  $m$  lassen sich die Integrale Gl. (12) in geschlossener Form lösen; wir haben davon im folgenden keinen Gebrauch gemacht.

Da nach Gl. (8) die Größe der Unstetigkeit  $u(\alpha)$  linear von  $v_p \sin \beta$  abhängig ist, gilt mit beliebigen Koeffizienten  $c_m$ :

Bei einer Geschwindigkeit [vergleiche Gl. (12)]:

$$\left. \begin{aligned} (v_p \sin \beta)_I &= \sum_{m=m_0}^{m=m_1} c_m (v_p \sin \beta)_m \\ \text{entsteht eine Unstetigkeitsfläche mit der Unstetigkeit:} \\ u_I(\alpha) &= \sum_{m=m_0}^{m=m_1} c_m \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\right)^m \quad (\alpha \geq 1) \end{aligned} \right\} (14)$$

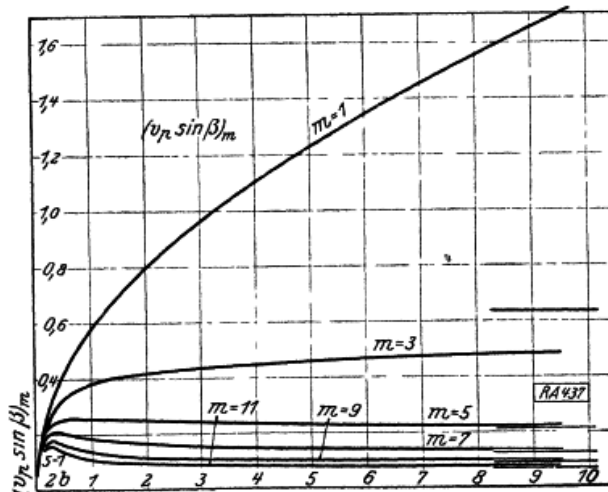


Abb. 7.

Wir setzen jetzt für konstant beschleunigte Bewegung des Tragflügels mit  $s_0 = 1$  z. B.  $v_p \sin \beta = 2/\pi \sqrt{s-1}$ . Es läßt sich nun mit Hilfe der Reihenentwicklung Gl. (13)

Zahlentafel I.

$(v_p \sin \beta)_m = :$

$s - s_0 =$	0	0,25	0,5	1	4	9	$\infty$
$m = 1$	0	0,3074	0,4240	0,5802	1,0986	1,6530	$\infty$
3	0	0,2658	0,3273	0,3781	0,4463	0,4836	0,6366
5	0	0,2309	0,2567	0,2588	0,2299	0,2203	0,2122
7	0	0,2016	0,2046	0,1852	0,1440	0,1346	0,1273
9	0	0,1768	0,1659	0,1391	0,1029	0,0961	0,0910
11	0	0,1560	0,1367	0,1089	0,0798	0,0747	0,0707

beweisen, daß die Koeffizienten  $c_m$  in Gl. (14) so gewählt werden können, daß für  $1 \leq s \leq S < \infty$  näherungsweise<sup>1)</sup>, aber beliebig genau folgende Gleichung gilt:

$$2/\pi \sqrt{s-1} = (v_p \sin \beta)_1 + \sum_{m=3}^{m=m_1} c_m (v_p \sin \beta)_m \dots (15),$$

vorausgesetzt, daß wir für  $m$  ungerade Werte wählen und  $m_1 > 3$  hinreichend groß ist. Die Koeffizienten  $c_m$  sind vorläufig noch unbekannt. Durch zahlenmäßige Berechnung beider Seiten von Gl. (15) für verschiedene Werte von  $s$  können wir die Koeffizienten  $c_m$  bestimmen (Interpolationsverfahren).

Die bei der durch Gl. (15) angegebenen Geschwindigkeit  $v_p \sin \beta$  des Tragflügels entstehende Unstetigkeitsfläche ist nach Gl. (14) bekannt; sie besitzt die Unstetigkeit

$$u(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \sum_{m=3}^{m=m_1} c_m \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\right)^m \dots (16).$$

Wir geben hier folgende (ziemlich ungenaue) Näherungslösung an:

$$u(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + 1,433 \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\right)^3 - 3,011 \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\right)^5 + 1,578 \left(\sqrt{\frac{1}{\alpha}}\right)^7.$$

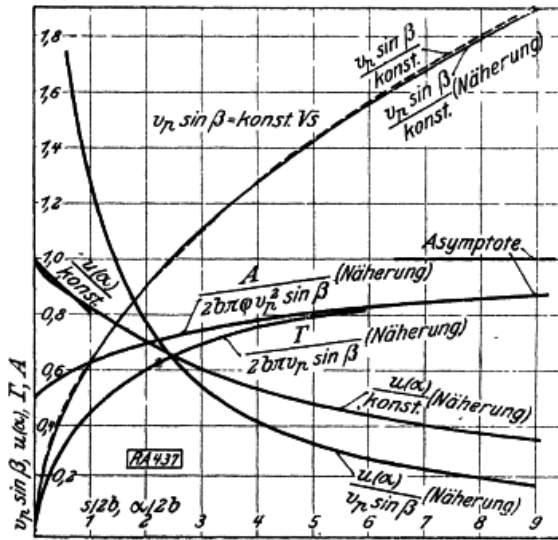


Abb. 8.

Diese Unstetigkeitsfläche und die ihr entsprechende Geschwindigkeit [rechte Seite von Gl. (15)] sind in Abb. 8 gezeichnet. Zum Vergleich ist die Parabel der konstant beschleunigten Bewegung [linke Seite von Gl. (15)] und die für  $1 \leq \alpha \leq 2$  nach § 3 genau bekannte Unstetigkeit der bei dieser Geschwindigkeit entstehenden Unstetigkeitsfläche dort angegeben. Die prozentuellen Abweichungen der näherungsweise angenommenen Geschwindigkeit [Gl. (15) rechte Seite] von der gegebenen, konstant beschleunigten Geschwindigkeit [Gl. (15) linke Seite] sind in folgender Zahlentafel gezeigt<sup>2)</sup>. Auch die Abweichungen der näherungsweise berechneten Unstetigkeit von der für  $0 \leq (\alpha - s_0) \leq 1$  für beschleunigte Bewegung genau ermittelten sind dort angegeben.

<sup>1)</sup> Um diese Gleichung zu erhalten, mußte  $\frac{1}{\sqrt{s}}$  für  $1 \leq s \leq S < \infty$  durch eine Potenzreihe von  $1/s$  ersetzt werden, was näherungsweise, aber beliebig genau durch eine hinreichend große Anzahl von Potenzen von  $1/s$  möglich ist.

<sup>2)</sup> Jene Werte von  $s$ , die zur Berechnung der Koeffizienten  $c_m$  verwendet worden sind und bei welchen folglich der Unterschied verschwindet, sind durch eine durchgestrichene Null gekennzeichnet.



$s - s_0$	0	0,25	0,5	1	4	9	$\infty$
Unterschiede von $v_p \sin \beta$ in vH	0	-2,3	-1,6	0	0	-0,8	0
$\alpha - s_0$	0	0,25	0,5	0,75	1		
Unterschiede von $u(\alpha)$ in vH . .	0	-2,45	-0,56	+0,83	+1,66		

**5. Näherungslösung für konstante Geschwindigkeit.** Wir setzen  $s_0 = 0$  und für  $s \geq 0$ :  $v_p \sin \beta = v_0 = \text{konst.}$  und haben die Integralgleichung zu lösen [vergl. Gl. (8)]:

$$v_0 = 1/\pi \int_0^s \frac{\sqrt{1+s-\alpha}}{\sqrt{s-\alpha}} u(\alpha) d\alpha.$$

Wir haben in § 4 eine Lösung gefunden, welche dieser Integralgleichung für  $0 \leq s \leq 1$  genügt. Diese Lösung bezeichnen wir mit  $u_1(\alpha)$ ; sie gibt uns die Größe der Unstetigkeit für  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Um  $u(\alpha)$  auch für größere Werte von  $\alpha$  zu finden, schreiben wir:

$$v_0 = 1/\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{1+s-\alpha}}{\sqrt{s-\alpha}} u_1(\alpha) d\alpha + 1/\pi \int_1^s \frac{\sqrt{1+s-\alpha}}{\sqrt{s-\alpha}} u_2(\alpha) d\alpha \quad (17).$$

Das erste Integral der rechten Seite ist dann nach obigem bekannt. Wir suchen jetzt die Funktion  $u_2(\alpha)$ , welche Gl. (17) genügt und die uns die Größe der Unstetigkeit für  $1 \leq \alpha < \infty$  angibt.

Es läßt sich nun mit Hilfe der Reihenentwicklungen Gl. (13) zeigen, daß bei entsprechender Wahl der Koeffizienten  $c_m$  für  $1 \leq s \leq S < \infty$  näherungsweise<sup>1)</sup>, aber beliebig genau folgende Gleichung gilt [vergl. Gl. (14)]:

$$v_0 = 1/\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{1+s-\alpha}}{\sqrt{s-\alpha}} u_1(\alpha) d\alpha + \sum_{m=3}^{m=m_1} c_m (v_p \sin \beta)_m \quad (18),$$

Vorausgesetzt, daß wir für  $m$  ungerade Werte wählen und  $m_1 > 3$  hinreichend groß ist. Die Bestimmung der vorläufig noch unbekanntenen Koeffizienten  $c_m$  geschieht durch ein Interpolationsverfahren, das dem in § 4 angegebenen ähnlich ist.

Nach Gl. (18) und Gl. (14) können wir nun für die bei konstanter Geschwindigkeit entstehende Unstetigkeitsfläche für  $1 \leq \alpha \leq A < \infty$  näherungsweise schreiben:

$$u_2(\alpha) = \sum_{m=3}^{m=m_1} c_m (\sqrt{1/\alpha})^m \quad (19).$$

Hier sei folgende Näherungslösung angegeben:

$$u_2(\alpha) = v_0 [1,1328 (\sqrt{1/\alpha})^3 - 0,4883 (\sqrt{1/\alpha})^5]$$

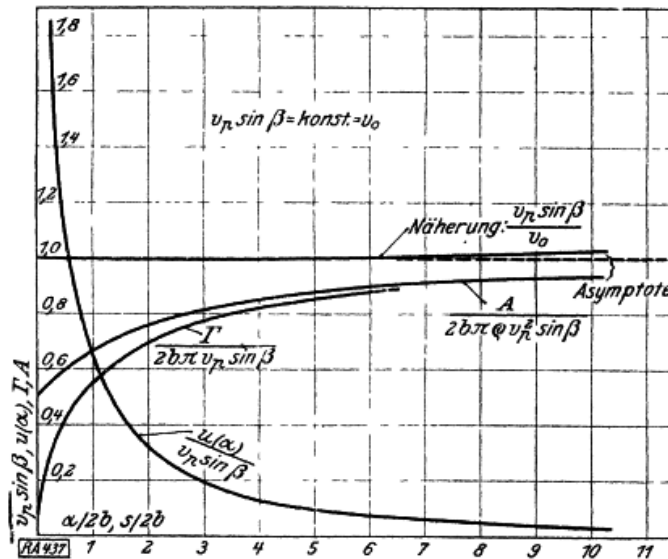


Abb. 9.

Die dieser Unstetigkeitsfläche entsprechende Geschwindigkeit [rechte Seite von Gl. (18)] stimmt bis etwa  $s = 7$  gut mit der durch die linke Seite von Gl. (18) gegebenen überein. Die prozentuellen Abweichungen beider Geschwindigkeiten sind in folgender Zahlentafel angegeben (vergl. auch Abb. 9).

$s - s_0$	1	1,25	1,5	1	5	10	$\infty$
Unterschiede von $v_p \sin \beta$ in vH	0	+0,18	+0,27	0,00	0	+2,89	+16,8

<sup>1)</sup> Vergl. Fußnote 1, S. 24.

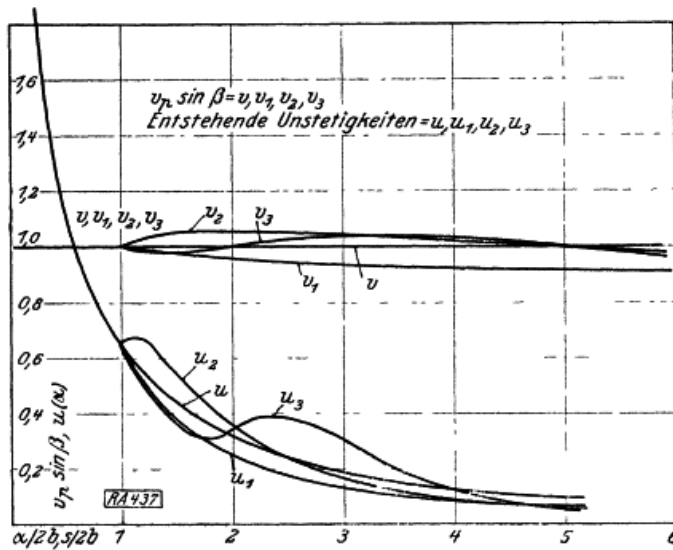


Abb. 10.

Um die große Empfindlichkeit der sich von der Kante ablösenden Unstetigkeitsfläche gegenüber geringen Änderungen der Geschwindigkeit zu zeigen, haben wir in Abb. 10 noch einige Geschwindigkeiten [ungenauere Näherungslösungen<sup>1)</sup> von Gl. (18)] und die bei diesen Geschwindigkeiten entstehenden Unstetigkeitsflächen dargestellt.

Wir untersuchen jetzt, welche Geschwindigkeit  $v_p \sin \beta$  des Tragflügels einem an der Abflugstelle entstehenden Potentialwirbel entspricht. Zu diesem Zweck setzen wir:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \int_0^{\Delta s} u(\alpha) d\alpha = \gamma$$

für alle anderen Werte von  $\alpha$  sei  $u(\alpha) = 0$ . Dann gilt nach Gl. (8) mit  $\alpha = 0$ :

$$v_p \sin \beta = 1/\pi \sqrt{1+s} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \int_0^{\Delta s} u(\alpha) d\alpha$$

also 
$$v_p \sin \beta = \gamma/\pi \sqrt{1+1/s}$$

Es entsteht daher z. B. in einer reibungsfreien, unzusammendrückbaren Flüssigkeit ein Potentialwirbel, wenn sich eine ebene Platte mit gerundeter Vorderkante bei ursprünglicher Ruhe in der Flüssigkeit mit einer Geschwindigkeit bewegt, die zumindest bei Beginn der Bewegung ( $s = 0$ ) der Gleichung entspricht:

$$v_p = C \sqrt{1+1/s} \dots \dots \dots (20)$$

$C$  ist eine beliebige Konstante. Der Anstellwinkel der Platte ist dabei zeitlich konstant gedacht.

Da die durch einen Potentialwirbel bedingte Bewegungsenergie der Flüssigkeit unendlich groß ist, hat dieses Beispiel nur theoretischen Wert.

**6. Die Kraftwirkung auf einen bewegten Körper beim Vorhandensein von Wirbeln (nicht-stationäres räumliches Problem).**

In einem mit reibungsfreier unzusammendrückbarer Flüssigkeit erfüllten, unendlich ausgedehnten Raum seien im Endlichen ein Körper und  $n$  Wirbelfäden vorhanden. Diese im Endlichen liegenden Wirbelfäden müssen entweder in sich geschlossen sein, oder an der Körperoberfläche enden. Wir setzen die Flüssigkeitsbewegung als drehungsfrei und mit Ausnahme der Wirbelfäden als stetig voraus. Im Unendlichen bewege sich die Flüssigkeit zeitlich konstant nach Art einer Parallelströmung; der Körper bewege sich beliebig. Von dem Vorhandensein eines Kraftfeldes werde abgesehen.

Wir denken uns durch eine im Unendlichen liegende, geschlossene Fläche  $F_\infty$  eine bestimmte (zeitlich immer dieselbe) Flüssigkeitsmasse für unsere Betrachtung herausgeschnitten. Ferner scheiden wir alle sich unstetig bewegenden Teile der Flüssigkeit, also alle Wirbelfäden, durch die Flächen  $F_n$  ( $F_1, F_2 \dots$ ) vom betrachteten Teil der Flüssigkeit. Die Oberfläche des Körpers bezeichnen wir mit  $F_\tau$ . Durch die Flächen  $F_n'$  ( $F_1', F_2' \dots$ ) machen wir den Raum einfach zusammenhängend.

Vom Flüssigkeitsdruck an den Flächen  $F_\infty, F_\tau$  und  $F_n$  erfährt der betrachtete Teil der Flüssigkeit eine Kraftwirkung  $\mathfrak{P}$ <sup>2)</sup>, die gegeben ist durch:

$$\mathfrak{P} = - \int_{F_\infty} p d\mathfrak{f} - \int_{F_\tau} p d\mathfrak{f} - \int_{\Sigma F_n} p d\mathfrak{f} \dots \dots \dots (21).$$

<sup>1)</sup> Um diese „ungenauen Näherungslösungen“ zu erhalten, wurde — entgegen dem Gültigkeitsbereich von Gl. (18) — zur Bestimmung der Koeffizienten  $c_m$  nach Gl. (18) auch der Punkt  $s = \infty$  herangezogen. — <sup>2)</sup> Vektoren sind mit deutschen Buchstaben bezeichnet.

Wir haben uns dabei die Differentiale  $d\mathfrak{f}$  vom betrachteten Raum nach außen gerichtet gedacht.

Diese Kraft hat eine zeitliche Aenderung der Bewegungsgröße  $\mathfrak{B}$  des betrachteten Teiles der Flüssigkeit zur Folge. Da die Oberflächen dieses Teiles der Flüssigkeit im Verlauf der Zeit ihre Lage und Form ändern, wenden wir (für die substantielle Aenderung) den Stokesschen Operator an und schreiben:

$$\mathfrak{B} = \frac{D}{Dt} \mathfrak{B} \dots \dots \dots (22).$$

Bezeichnet  $dv$  das Volumen eines Flüssigkeitsteilchens, so erhalten wir mit  $v = \text{grad } \varphi$  und dem Gausschen Integralsatz:

$$\mathfrak{B}/\varrho = \int_v \text{grad } \varphi dv = \int_{F_\infty} \varphi d\mathfrak{f} + \int_{F_\tau + \Sigma F_n'} \varphi d\mathfrak{f} + \int_{\Sigma F_n} \varphi d\mathfrak{f} \dots \dots \dots (23).$$

Bezeichnen wir die Kraft, die der Körper erfährt, mit  $\mathfrak{P}_\tau$ :

$$\mathfrak{P}_\tau = \int_{F_\tau} p d\mathfrak{f}$$

und setzen wir für  $p = \varrho \left( -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{v^2}{2} \right)$ , so gilt mit Gl. (21), (22), (23):

$$1/\varrho \mathfrak{P}_\tau = + \int_{F_\infty} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right) d\mathfrak{f} + 1/\varrho \int_{\Sigma F_n} p d\mathfrak{f} - \frac{D}{Dt} \int_{F_\infty} \varphi d\mathfrak{f} - \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + \Sigma F_n'} \varphi d\mathfrak{f} - \frac{D}{Dt} \int_{\Sigma F_n} \varphi d\mathfrak{f}$$

Lassen wir die Flächen  $F_n$  die Wirbellflächen unendlich knapp umschließen, und lassen wir die Flächen  $F_n'$  bis zu den Wirbelfäden selbst reichen, so verschwindet, wie eine Grenz Betrachtung zeigt, das zweite und letzte Integral der rechten Seite dieser Gleichung. Da ferner die von Wirbelfäden und Körper bedingte Geschwindigkeit im Unendlichen unendlich klein dritter Ordnung wird<sup>1)</sup>, ist

$$\int_{F_\infty} \frac{v^2}{2} d\mathfrak{f} = \frac{v_\infty^2}{2} \int_{F_\infty} d\mathfrak{f} = 0$$

$v_\infty$  bedeutet hierin die nach Annahme örtlich und zeitlich konstante Geschwindigkeit im Unendlichen.

Wir erhalten also:

$$1/\varrho \mathfrak{P}_\tau = + \int_{F_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\mathfrak{f} - \frac{D}{Dt} \int_{F_\infty} \varphi d\mathfrak{f} - \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + \Sigma F_n'} \varphi d\mathfrak{f}.$$

Wir sehen aus dieser Gleichung, daß die Wirkung des Körpers auf die Flüssigkeit in einer vom Flüssigkeitsdruck herrührenden Kraft auf die unendlich ferne Grenzfläche  $F_\infty$  (das erste Integral der rechten Seite) und in einer zeitlichen Aenderung der Bewegungsgröße der Flüssigkeit (die beiden letzten Integrale der rechten Seite) besteht. Beide Wirkungen sind im allgemeinen von endlicher Größe. Da jedoch die von Wirbelfäden und Körper bedingte Geschwindigkeit, wie bereits bemerkt, im Unendlichen unendlich klein dritter Ordnung wird, gilt:

$$\int_{F_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\mathfrak{f} = \frac{D}{Dt} \int_{F_\infty} \varphi d\mathfrak{f}.$$

Wir erhalten also als Kraftwirkung auf den Körper:

$$\mathfrak{P}_\tau = - \varrho \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + \Sigma F_n'} \varphi d\mathfrak{f} \dots \dots \dots (24).$$

**7. Anwendungsbeispiel.** Wir wollen jetzt die Strömung als eben voraussetzen. Die Zirkulation in einer Kurve, die alle Wirbelfäden und den Körper umschließt, sei Null. In diesem Falle gilt Gl. (24) in unveränderter Form.

Wir denken uns die gesamte Strömung aus zwei Teilströmungen überlagert:

1. Der stetigen zirkulationsfreien Strömung des unendlichen Parallelstromes um den ruhend gedachten Körper. Geschwindigkeit und Potential dieser Strömung nennen wir bezw.  $v_\infty'$  und  $\varphi_\infty'$ .

<sup>1)</sup> Helmholtz, Journal f. reine u. angew. Math., Bd. 55, 1858, S. 46.

2. Der Strömung, welche bei ruhend gedachter Flüssigkeit im Unendlichen der Geschwindigkeit des Körpers, der Zirkulation um den Körper und dem Vorhandensein der Wirbelfäden entspricht. Geschwindigkeit und Potential dieser Strömung bezeichnen wir bezw. mit  $v_\infty$  und  $\varphi_\infty$ .

Wir wollen jetzt noch im besonderen annehmen, daß der Körper sich nicht drehe (eine reine Translationsbewegung ausführe) und daß die Wirbelfäden unendlich weit vom Körper entfernt seien.

Wir setzen in Gl. (24)  $\varphi = \varphi_\infty' + \varphi_w$ :

$$1/\rho \mathfrak{P}_\tau = - \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau} \varphi_\infty' d\mathfrak{f} - \frac{D}{Dt} \int_{\Sigma F_n'} \varphi_\infty' d\mathfrak{f} - \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau} \varphi_w d\mathfrak{f} - \frac{D}{Dt} \int_{\Sigma F_n'} \varphi_w d\mathfrak{f} \quad (25).$$

Da  $\varphi_\infty'$  an den Flächen  $F_n'$  stetig ist, gilt

$$\int_{\Sigma F_n'} \varphi_\infty' d\mathfrak{f} = 0, \quad \text{folglich auch} \quad \frac{D}{Dt} \int_{\Sigma F_n'} \varphi_\infty' d\mathfrak{f} = 0.$$

Da  $v_\infty'$  als zeitlich konstant vorausgesetzt ist, verschwindet entsprechend der Annahme, daß die Wirbelfäden unendlich weit vom Körper entfernt sind, auch das erste Integral der rechten Seite:

$$\frac{D}{Dt} \int_{F_\tau} \varphi_\infty' d\mathfrak{f} = 0.$$

Die Flächen  $F_n'$  können zu jeder Zeit beliebig gewählt werden, sie müssen nur den Raum einfach zusammenhängend machen. Wir wollen nun für den ganzen zeitlichen Verlauf der Bewegung alle Flächen  $F_n'$  von einem bestimmten Punkt des Körpers ausgehen lassen. Würden wir vom Körper voraussetzen, daß er sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegte, dann würde das Potential  $\varphi_w$  an allen Stellen der Körperoberfläche im ganzen Verlauf der Zeit (bis auf eine beliebige, örtlich konstante Größe) einen zeitlich konstanten Wert besitzen und

$$- \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau} \varphi_w d\mathfrak{f}$$

würde Null ergeben. Bewegt sich der Körper jedoch beschleunigt, so ergibt dieses Integral die der Beschleunigung proportionale, ihr entgegengesetzt gerichtete Kraft, die der überall stetigen und drehungsfreien Bewegung der Flüssigkeit bei beschleunigter Bewegung des Körpers entspricht. Diese bei gegebener Kontur prinzipiell berechenbare Kraft bezeichnen wir mit  $\mathfrak{P}_b$ .

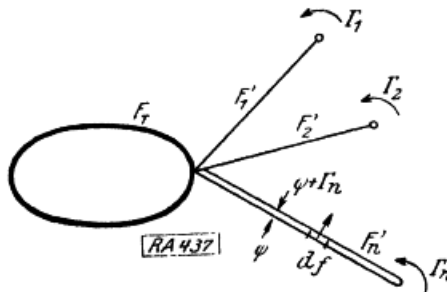


Abb. 11.

Wir formen jetzt das letzte Integral der rechten Seite von Gl. (25) um.  $\varphi_w$  ist an den Flächen  $F_n'$  unstetig; es ist an der einen Seite der Flächen um  $\Gamma_n$  größer wie an der anderen (vergl. Abb. 11). Folglich

$$- \frac{D}{Dt} \int_{\Sigma F_n'} \varphi_w d\mathfrak{f} = + \frac{D}{Dt} \int_{\Sigma F_n'} \Gamma_n d\mathfrak{f} = + \sum_n \Gamma_n \frac{D}{Dt} \mathfrak{f}_n'.$$

Bezeichnet  $v_{rn}$  die relative Geschwindigkeit zwischen dem Wirbelfaden  $n$  und dem Körper, und  $\mathfrak{z}$  den Abstand der beiden Parallelebenen, zwischen welchen wir uns die ebene Strömung stattfindend denken, so ist:

$$\frac{D}{Dt} \mathfrak{f}_n' = [\mathfrak{z} v_{rn}].$$

Bezeichnet  $v_n$  die absolute Geschwindigkeit des Wirbelfadens  $n$ , so gilt nach dem Helmholtzschen Satz für die ebene Bewegung von Wirbelfäden in unendlich ausgedehnter Flüssigkeit

$$\sum_n \Gamma_n v_n = v_\infty \sum_n \Gamma_n.$$

Ist  $v_\tau$  die Geschwindigkeit des Körpers, so gilt  $v_{rn} = v_\infty - v_\tau$ , folglich

$$\sum_n \Gamma_n [\mathfrak{z} v_{rn}] = [\mathfrak{z} (v_\infty - v_\tau)] \sum_n \Gamma_n.$$

Bezeichnet  $\Gamma_\tau$  die Zirkulation in einer Kurve, welche nur den Körper umschließt, so gilt laut Voraussetzung

$$\sum \Gamma_n = -\Gamma_\tau.$$

Wir erhalten damit nach Gl. (25)

$$\mathfrak{P}_\tau = \mathfrak{P}_b + \rho \Gamma_\tau [\frac{1}{2} (v_\tau - v_\infty)] \dots \dots \dots (26).$$

Bewegt sich im besonderen der Körper mit konstanter Geschwindigkeit und bezeichnen wir mit  $P_\tau$  die Größe der Kraft  $\mathfrak{P}_\tau$  pro Längeneinheit des Körpers ( $P_\tau =$  Auftriebsdichte) und bezeichnen  $v_r$  die Größe der relativen Geschwindigkeit zwischen dem Körper und den Flüssigkeitsteilchen im Unendlichen, so erhalten wir:

$$P_\tau = \rho \Gamma_\tau v_r \dots \dots \dots (27).$$

$P_\tau$  steht senkrecht auf die Richtung von  $v_r$ .  $v_r$  stellt gleichzeitig die relative Geschwindigkeit zwischen dem Körper und dem »Schwerpunkt« (nach Helmholtz) der vorhandenen Wirbelfäden dar.

**8. Auftrieb der ebenen Platte mit kleinem Anstellwinkel.** Zu ermitteln ist die Kraft

$$\mathfrak{P}_\tau = -\rho \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + F_n'} \varphi \, d\mathfrak{f},$$

wobei  $\varphi$  das Potential der in Abb. 4 dargestellten Strömung ist. Als Fläche  $F_n'$  wählen wir die Unstetigkeitsfläche.

Wir bezeichnen nun mit  $\varphi_1$  das Potential der stetigen zirkulationsfreien Flüssigkeitsbewegung um die mit der Geschwindigkeit  $v_p$  bewegte Platte bei ruhender Flüssigkeit im Unendlichen; ferner bezeichnen wir mit  $\varphi_2$  das Potential der Strömung, die bei ruhender Platte und ruhender Flüssigkeit im Unendlichen dem Vorhandensein der Unstetigkeitsfläche und der Zirkulation um die Platte entspricht (vergl. Abb. 3). Da durch die Superposition dieser beiden Strömungen die in Abb. 4 dargestellte Strömung entsteht, schreiben wir für  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  und erhalten:

$$\mathfrak{P}_\tau = -\rho \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + F_n'} \varphi_1 \, d\mathfrak{f} - \rho \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + F_n'} \varphi_2 \, d\mathfrak{f} = \mathfrak{P}_b + \mathfrak{A} \dots \dots \dots (28).$$

Wir denken uns also die bei der unstetigen Flüssigkeitsbewegung auf die Platte ausgeübte Kraft  $\mathfrak{P}_\tau$  aus zwei Teilkraften bestehend; aus der Teilkraft  $\mathfrak{P}_b$  (dem ersten Integral der rechten Seite) und der Teilkraft  $\mathfrak{A}$  (dem zweiten Integral der rechten Seite).

Zuerst berechnen wir  $\mathfrak{P}_b$ . Da  $\varphi_1$  zu beiden Seiten der Fläche  $F_n'$  den gleichen Wert hat, ist

$$\int_{F_n'} \varphi_1 \, d\mathfrak{f} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{D}{Dt} \int_{F_n'} \varphi_1 \, d\mathfrak{f} = 0.$$

Das stetige Geschwindigkeitsfeld um die Platte, also auch das Potential  $\varphi_1$  ist bekannt. Wir erhalten für den Betrag der Teilkraft  $\mathfrak{P}_b$ :

$$P_b = \rho \left| \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau} \varphi_1 \, d\mathfrak{f} \right| = \rho \frac{D}{Dt} (\pi b^2 v_p \sin \beta) = \rho \pi b^2 \frac{d(v_p \sin \beta)}{dt} \dots \dots (29).$$

Die Richtung von  $\mathfrak{P}_b$  ist senkrecht zur Plattenoberfläche. Diese Teilkraft  $\mathfrak{P}_b$  ist ebenso groß wie die Kraft, die bei der stetigen Flüssigkeitsbewegung auf die mit zeitlich veränderlicher Geschwindigkeit  $v_p \sin \beta$  bewegte Platte ausgeübt wird.

Wir gehen jetzt zur Ermittlung der Teilkraft  $\mathfrak{A}$  über. Dazu betrachten wir zuerst folgende ebene Strömung (Abb. 12).

Um die ruhende kreiszylindrische Kontur  $F_K$  vom Radius  $b$  sei eine Zirkulation von der Größe  $-\Gamma$  vorhanden; im Abstand  $X_0$  vom Mittelpunkt der Kontur befinde sich ein Wirbelfaden mit der Zirkulation  $+\Gamma$ . Wir bezeichnen mit  $\Phi_2$  das Geschwindigkeitspotential. Gesucht ist das Integral

$$\int_{F_K} \Phi_2 \, d\mathfrak{f}.$$

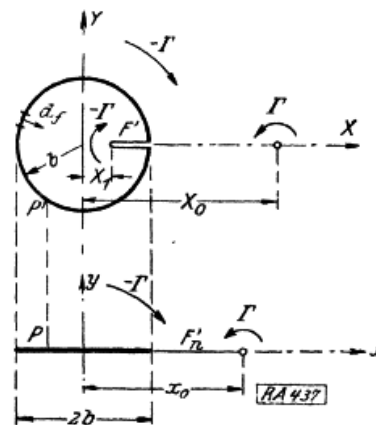


Abb. 12.

Wir denken uns den Zylinder von bewegter Flüssigkeit erfüllt; um die Grenzbedingung an der Kontur zu wahren, nehmen wir an der Stelle  $X_1 = \frac{b^2}{X_0}$ ,  $Y_1 = 0$  einen Wirbelfaden mit der Zirkulation  $-\Gamma$  an. Da die Kontur als ruhend vorausgesetzt ist, ist die Bewegungsgröße  $\mathfrak{B}$  der innerhalb der Kontur sich befindenden Flüssigkeitsmasse:  $\mathfrak{B} = 0$ . Andererseits ist die Bewegungsgröße durch das Integral gegeben (bezüglich der Bezeichnungen s. Abb. 12):

$$\mathfrak{B} = 0 = -\rho \int_{F_K} \Phi_3 d\bar{f} - \rho \int_{F'} \Phi_3 d\bar{f}.$$

Daraus folgt, daß

$$\int_{F_K} \Phi_3 d\bar{f}$$

parallel zur  $Y$ -Achse liegt. Der Betrag des Integrals ist

$$\left| \int_{F_K} \Phi_3 d\bar{f} \right| = \Gamma (b - X_1) = \Gamma \left( b - \frac{b^2}{X_0} \right) \dots \dots \dots (30).$$

Bezeichnen wir mit  $\Phi_{3K}$  die Größe von  $\Phi_3$  an den Punkten  $P'$  der Kreiskontur, so können wir den Betrag des Integrals auch in der Weise anschreiben:

$$\left| \int_{F_K} \Phi_3 d\bar{f} \right| = 2 \int_{+b}^{-b} \Phi_{3K} dX.$$

Wir bilden nun die Strömung um die Kreiskontur mit Hilfe von Gl. (2) konform ab in eine Strömung um die ebene Platte. Der Wirbelfaden befindet sich dann im System der Platte an der Stelle  $x = x_0$ ,  $y = 0$ , die der Stelle  $X = X_0$ ,  $Y = 0$  des Systems der Kreiskontur entspricht.

Da bei der konformen Abbildung eines Kreiszyllinders in eine Platte nach Gl. (2) den Punkten  $P(x, y = 0)$  der Plattenoberfläche die Punkte  $P'(X = x, Y = \sqrt{b^2 - x^2})$  der Zylinderoberfläche entsprechen, hat das Potential  $\varphi_{3p}$  an den Punkten der Plattenoberfläche den gleichen Wert wie das Potential  $\Phi_{3K}$  an den Punkten gleicher Abszisse ( $x = X$ ) der Zylinderoberfläche; folglich ist

$$2 \int_{+b}^{-b} \Phi_{3K} dX = 2 \int_{+b}^{-b} \varphi_{3p} dx.$$

Folglich [mit Gl. (30)]

$$\left| \int_{F_P} \varphi_3 d\bar{f} \right| = \left| \int_{F_K} \Phi_3 d\bar{f} \right| = \Gamma \left( b - \frac{b^2}{X_0} \right).$$

Reicht die Fläche  $F_n'$  (Abb. 12) von  $x = b$  bis  $x = x_0$ , so ist

$$\left| \int_{F_P + F_n'} \varphi_3 d\bar{f} \right| = \Gamma \left( x_0 - \frac{b^2}{X_0} \right) \dots \dots \dots (31).$$

Die Richtung des Integrals der Linken Seite ist nach Vorhergehendem die  $y$ -Richtung.

Bewegt sich die Platte in Abb. 12 mit einer Geschwindigkeit  $v_p$  nach links, so wird bei Verwendung von Gl. (31) und Gl. (4):

$$\frac{D}{Dt} \left| \int_{F_P + F_n'} \varphi_3 d\bar{f} \right| = \frac{d}{da_0} \left| \int_{F_P + F_n'} \varphi_3 d\bar{f} \right| \cdot v_p = \Gamma v_p \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - b^2}}.$$

Ist nicht ein Wirbelfaden, sondern eine Unstetigkeitsfläche auf der  $x$ -Achse vorhanden, so fassen wir diese Unstetigkeitsfläche als geschlossene Reihe von Wirbelfäden mit der Zirkulation  $d\Gamma = u(\alpha) d\alpha$  auf. Das Potential  $\varphi_2$  der durch diese Unstetigkeitsfläche bedingten Strömung läßt sich nun durch die Summe der Potentiale der durch die einzelnen Wirbelfäden bedingten Strömungen darstellen. Da alle diese Wirbelfäden sich relativ zur Platte mit der Geschwindigkeit  $v_p$  bewegen, erhalten wir mit den in Abb. 4 angegebenen Bezeichnungen für den Betrag von  $\mathfrak{A}$ :

$$A = \rho \left| \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + F_n'} \varphi_2 d\bar{f} \right| = v_p \int_s^{s_0} \frac{s - \alpha + 1/2}{\sqrt{(s - \alpha) + (s - \alpha)^2}} u(\alpha) d\alpha$$

und nach einer Umformung:

$$A = \rho v_p \int_{s_0}^s \frac{\sqrt{1+s-a}}{\sqrt{s-a}} u(\alpha) d\alpha - \frac{1}{2} \rho v_p \int_{s_0}^s \frac{u(\alpha) d\alpha}{\sqrt{(s-a)+(s-\alpha)^2}}$$

Betrachten wir im besonderen die Unstetigkeitsfläche, die sich bei der Bewegung der Platte von der Kante  $K$  ablöst, so erhalten wir nach Gl. (8):

$$A = \pi \rho v_p^2 \sin \beta - \frac{1}{2} \rho v_p \int_{s_0}^s \frac{u(\alpha) d\alpha}{\sqrt{(s-a)+(s-\alpha)^2}} \quad (32).$$

Wir erhalten also mit Gl. (28) (29) (32) für den Betrag der Tragflügelkraft  $\mathfrak{P}_\tau$ :

$$P_\tau = P_b + A = \pi/4 \rho \frac{d(v_p \sin \beta)}{dt} + \pi \rho v_p^2 \sin \beta - \frac{1}{2} \rho v_p \int_{s_0}^s \frac{u(\alpha) d\alpha}{\sqrt{(s-a)+(s-\alpha)^2}} \quad (33).$$

Durch diese Gleichung ist, in Verbindung mit Gl. (8), bei gegebenem  $v_p \sin \beta$  oder gegebenem  $u(\alpha)$  die auf die Platte wirkende Kraft bekannt.

Für die durch Gl. (12) definierten Geschwindigkeiten  $(v_p \sin \beta)_m$  sind die Teilkräfte  $A$  in Zahlentafel II eingetragen. Auch für die Bewegung des Tragflügels mit konstanter Geschwindigkeit, für konstant beschleunigte Bewegung und für die Bewegung entsprechend Gl. (20) wurden die Teilkräfte  $A$  berechnet; einige Zahlenwerte seien hier angegeben (vergl. auch Abb. 5, 6, 8 und 9).

Zahlentafel II.

$$\frac{A}{2 b \pi \rho v_p^2 \sin \beta} = :$$

$s - s_0 =$	0	0,25	0,5	1	4	9	$\infty$
$(v_p \sin \beta)_1$	0,5	0,5384	0,5713	0,6242	0,7797	0,8667	1
$(v_p \sin \beta)_3$	0,5	0,5405	0,5778	0,6411	0,8263	0,9131	1
$(v_p \sin \beta)_5$	0,5	0,5427	0,5846	0,6582	0,8607	0,9372	1
$(v_p \sin \beta)_7$	0,5	0,5450	0,5916	0,6744	0,8796	0,9452	1
$\frac{\sqrt{s-s_0}}{\sqrt{1+\frac{1}{s-s_0}}}$	0,5	0,5486	0,5764	0,6202	0,7769	0,8688	1
$\sqrt{1+\frac{1}{s-s_0}}$	0,5	0,6	0,6667	0,75	0,9	0,95	1

$s - s_0 =$	0	0,25	0,5	1	2	5	10	$\infty$
$v_0 = \text{konst.}$	0,5	0,5557	0,6006	0,6693	0,7582	0,8745	0,9321	1
$\sqrt{1+\frac{1}{s-s_0}}$	0,5	0,6	0,6667	0,75	0,8333	0,9167	0,9545	1

Die in § 4 und § 5 für  $v_p \sin \beta = 2/\pi \sqrt{s-1}$  und  $v_p \sin \beta = \text{konst.}$  berechneten Funktionen  $u(\alpha)$  sind, wie wir bemerkt haben, ungenau. Diese Ungenauigkeiten haben jedoch nur wenig Einfluß auf die Berechnung der Teilkraft  $A$  nach Gl. (32), da besonders für größere Werte von  $s$  das zweite Glied der rechten Seite von Gl. (32) klein ist gegenüber dem exakt berechenbaren ersten Glied.

**9. Einfluß der Zähigkeit.** Die Zirkulationstheorie ergibt bezüglich des Auftriebes Werte, die sich bei kleinen Anstellwinkeln der Tragflügel gut den Versuchsergebnissen annähern. Es sei hier noch eine Forderung erwähnt, die wir an die Formgebung eines Tragflügels stellen müssen, damit auch bei der Bewegung des Tragflügels in wirklicher (zäher) Flüssigkeit sich eine Strömung einstellt, die der berechneten ähnlich ist und so bei großen Auftriebskräften einen geringen Widerstand ergibt.

Nach der Prandtl'schen Grenzschichtentheorie löst sich bald nach einem Druckminimum die Strömung von der Oberfläche eines Körpers ab. Würde sowohl an der Oberseite wie auch an der Unterseite des Tragflügels ein Druckminimum vorhanden sein, so würde sich die Strömung an der Oberseite und an der Unterseite vom Tragflügel ablösen und die Hinterkante würde sich in einem Raum mit nur schwach bewegter Flüssigkeit

(Totraum) befinden. Sie kann in diesem Fall nicht mehr maßgebend sein für die Strömungsvorgänge und es wird sich eine mit geringerem Auftrieb und größerem Widerstand verbundene Strömung einstellen.

Da ein Druckminimum am Tragflügel unvermeidlich ist, wenn dieser überhaupt eine Kraftwirkung erfahren soll, muß ein Tragflügel so geformt sein, daß nur an seiner Oberseite ein Druckminimum vorhanden ist<sup>1)</sup>.

Die an der Oberseite des Tragflügels entstehende Wirbelschicht zerfällt, wie Versuche zeigen<sup>2)</sup>, in Wirbelfäden ähnliche Gebilde. Diese Wirbelbildungen lassen sich durch die Theorie der Bewegung der reibungsfreien Flüssigkeit um einen Körper mit einer Kante nicht erklären.

**10. Momentengleichung.** Auf Anregung von Hrn. v. Mises habe ich noch den Angriffspunkt der Tragflügelkraft beim nichtstationären Problem berechnet.

Wir betrachten einen unendlich ausgedehnten, von Flüssigkeit erfüllten Raum, in welchem ein Körper vorhanden ist. Bezüglich der physikalischen Eigenschaften und des Bewegungszustandes der Flüssigkeit machen wir wieder die Annahmen, die wir in den beiden ersten Absätzen des § 6 besprochen haben. Wir behalten auch die in § 6 gewählten Bezeichnungen bei. Wir nehmen jedoch außerdem an, daß die Flüssigkeit im Unendlichen ruhe ( $v_\infty = 0$ ).

Bezeichnet  $L$  irgend einen im Raum ruhenden Punkt, auf den wir das Moment der Bewegungsgröße (den Drall)  $\mathfrak{D}_L$  der von den Flächen  $F_\infty$  und  $F_\tau$ <sup>3)</sup> begrenzten Flüssigkeitsmasse beziehen, so gilt für die zeitliche Änderung dieses Dralls:

$$\frac{D\mathfrak{D}_L}{Dt} = \mathfrak{M}_L \dots \dots \dots (34).$$

Hierin bedeutet  $\mathfrak{M}_L$  das Moment der äußeren Kräfte (Flüssigkeitsdruck an den Flächen  $F_\infty$  und  $F_\tau$ ) bezüglich des Punktes  $L$ .

Gibt der auf  $L$  bezogene Radiusvektor  $r$  die Lagen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen, so berechnet sich der Drall mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes zu

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_L &= \int_V [r v] dv = \int_V [r \operatorname{grad} \varphi] dv \\ \mathfrak{D}_L &= \int_{F_\infty} \varphi [r d f] + \int_{F_\tau + \sum F_n'} \varphi [r d f] \dots \dots \dots (35). \end{aligned}$$

Wir haben uns dabei (wie in § 6) die Differentiale  $d f$  vom betrachteten Raum nach außen gerichtet gedacht.

Bezeichnet nun wieder  $\mathfrak{P}_\tau$  die vom Flüssigkeitsdruck auf den Körper ausgeübte Kraft, bezeichnet ferner  $r_\tau$  einen Radiusvektor, der vom Punkt  $L$  zur Wirkungslinie von  $\mathfrak{P}_\tau$  geht, so können wir für  $\mathfrak{M}_L$  schreiben;

$$\mathfrak{M}_L = -[r_\tau \mathfrak{P}_\tau] - \int_{F_\infty} p [r d f] \dots \dots \dots (36).$$

Mit  $p = -\rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right)$  und bei Beachtung von Gl. (34), (35), (36) erhalten wir nun:

$$1/\rho [r_\tau \mathfrak{P}_\tau] = + \int_{F_\infty} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right) [r d f] - \frac{D}{Dt} \int_{F_\infty} \varphi [r d f] - \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + \sum F_n'} \varphi [r d f].$$

Da  $v$  an der unendlich fernen Grenzfläche entsprechend den Annahmen unendlich klein 3. Ordnung ist, läßt sich beweisen, daß

$$\int_{F_\infty} \frac{v^2}{2} [r d f] = 0 \quad \text{und daß} \quad \int_{F_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} [r d f] - \frac{D}{Dt} \int_{F_\infty} \varphi [r d f] = 0.$$

<sup>1)</sup> Prandtl, Verh. d. III intern. Math.-Kong., Heidelberg 1904, Abb. 5 und 6.

<sup>2)</sup> Prandtl, Jahrb. d. Luft-Fahrzeug-Ges. 1912/13, Abb. 4 und 5.

<sup>3)</sup> Obwohl es nicht ganz exakt ist, lassen wir der übersichtlichen Darstellung halber die Flächen  $F_n$  (welche die sich unstetig bewegenden Teile der Flüssigkeit, also die Wirbelfäden, vom betrachteten Teil der Flüssigkeit scheiden) aus der Betrachtung fort und denken uns dafür die den Raum einfach zusammenhängend machenden Flächen  $F_n'$  bis zu den unendlich dünnen Wirbelfäden selbst reichend.



Wir erhalten das Resultat: 
$$[r_\tau \mathfrak{P}_\tau] = -\rho \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + \Sigma F_n'} \varphi [r d\mathfrak{f}] \dots \dots \dots (37).$$

Wir wenden jetzt diese Gleichung auf die ebene Strömung um die Platte an. Wir legen bei der in Abb. 4 dargestellten Strömung den Ursprung des Achsenkreuzes in die Mitte der Platte; das Achsenkreuz bewegt sich also auch mit der Geschwindigkeit  $v_p$ . Auf der in Richtung der ebenen Platte liegenden  $x$ -Achse wählen wir den ruhenden Bezugspunkt  $L$ , dessen Abszisse wir mit  $x_L$  bezeichnen;  $x_L$  verringert sich pro Zeiteinheit um  $v_p$ .

Da die in § 8 berechnete Tragflügelkraft  $\mathfrak{P}_\tau$  senkrecht auf die Platte wirkt, erhalten wir für den Betrag des Momentes dieser Kraft um den Bezugspunkt  $L^1$ ):

$$|[r_\tau \mathfrak{P}_\tau]| = r_\tau P_\tau = \rho \left| \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + F_n'} \varphi [r d\mathfrak{f}] \right| = \rho \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + F_n'} \varphi (x_L - x) dx.$$

Hierin bedeutet  $\varphi$  das Potential der in Abb. 4 dargestellten Strömung. Mit  $r_\tau$  haben wir den Abstand zwischen dem Angriffspunkt der Kraft  $P_\tau$  und dem Punkt  $L$  bezeichnet. Schreiben wir wieder mit den Bezeichnungen des § 8  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ , so erhalten wir:

$$1/\rho r_\tau P_\tau = \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + F_n'} \varphi_1 (x_L - x) dx + \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + F_n'} \varphi_2 (x_L - x) dx \dots \dots (38).$$

Nun ist [vergl Gl. (29)]

$$x_L \int_{F_\tau} \varphi_1 dx = -x_L \pi b^2 v_p \sin \beta, \quad \int_{F_\tau} \varphi_1 x dx = 0$$

und, da  $\varphi_1$  an der Fläche  $F_n'$  stetig ist

$$\int_{F_n'} \varphi_1 (x_L - x) dx = 0.$$

Da sich bei der Bewegung der Platte  $x_L$  und  $v_p \sin \beta$  ändern, erhalten wir:

$$\frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + F_n'} \varphi_1 (x_L - x) dx = \pi b^2 v_p \sin \beta - x_L \pi b^2 \frac{d(v_p \sin \beta)}{dt} \dots \dots (39).$$

Um das zweite Integral von Gl (38) zu berechnen, betrachten wir zuerst das Geschwindigkeitsfeld Abb. 12. Setzen wir der Kürze halber  $X_0 - X_1 = 2a$ , so erhalten wir für das Potential dieser Strömung um die Kreiskontur (bezüglich der Bezeichnungen vergl. § 8 und Abb. 12):

$$\psi_3 = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \left[ \frac{2aY}{(X - \sqrt{a^2 + b^2})^2 + Y^2 - a^2} \right].$$

Setzen wir in dieser Gleichung für  $Y = \sqrt{b^2 - X^2}$ , so erhalten wir das Potential  $\psi_{3K}$  an der Kreiskontur.

Für  $x = X$  gilt, wie bereits in § 8 bemerkt,  $\varphi_{3P} = \psi_{3K}$ ; daraus folgt, daß

$$\int_{-b}^{+b} \varphi_{3P} x dx = \int_{-b}^{+b} \psi_{3K} X dX.$$

$\psi_{3K}$  ist nach obigem bekannt. Durch Ausführung der Integration erhalten wir:

$$\int_{-b}^{+b} \varphi_{3P} x dx = -\Gamma/8 \left( b^2 - \frac{b^4}{X_0^2} \right).$$

Nun ist 
$$\int_{F_P} \varphi_2 x dx = 2 \int_{-b}^{+b} \varphi_{3P} x dx = -\Gamma/4 \left( b^2 - \frac{b^4}{X_0^2} \right) \dots \dots (40).$$

<sup>1)</sup> Bei der Auswertung des Integrals der rechten Seite müssen wir beachten, daß das Integral auf beide Seiten (Oberseite und Unterseite) der Flächen  $F_\tau$  und  $F_n'$  zu erstrecken ist und daß die Flächenelemente  $d\mathfrak{f}$  in Gl. (37) vom betrachteten Flüssigkeitsraum nach außen gerichtet sind.

Wir erhalten ferner (vergl. § 8)

$$x_L \int_{F_P} \varphi_3 dx = x_L \Gamma \left( b - \frac{b^2}{x_0} \right) \dots \dots \dots (41).$$

Da  $\varphi_3$  auf der einen Seite der Fläche  $F_n'$  um  $\Gamma$  größer ist wie auf der anderen, ist

$$\int_{F_n'} \varphi_3 (x_L - x) dx = \Gamma (x_0 - b) \left( x_L - \frac{x_0 + b}{2} \right) \dots \dots \dots (42).$$

Bei der Bewegung der Platte mit der Geschwindigkeit  $v_p$  nach links (in Abb. 12) ändern sich  $x_0$  und  $x_L$ ; dementsprechend erhalten wir mit Gl. (40), (41), (42) und bei Beachtung von Gl. (4)

$$\frac{D}{Dt} \int_{F_P + F_n'} \varphi_3 (x_L - x) dx = \frac{2 x_0 x_L - b^2}{2 \sqrt{x_0^2 - b^2}} \Gamma v_p.$$

Da nun bei der Strömung Abb. 4 nicht nur ein Wirbelfaden, sondern eine Unstetigkeitsfläche vorhanden ist, deren einzelne Wirbelfäden die Zirkulation  $u(\alpha) d\alpha$  besitzen und sich relativ zur Platte mit der Geschwindigkeit  $v_p$  bewegen, erhalten wir mit den Bezeichnungen der Abb. 4

$$\frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + F_n'} \varphi_3 (x_L - x) dx = -x_L v_p \int_{s_0}^s \frac{s - \alpha + 1/2}{\sqrt{(s - \alpha) + (s - \alpha)^2}} u(\alpha) d\alpha + 1/2 v_p \int_{s_0}^s \frac{u(\alpha) d\alpha}{\sqrt{(s - \alpha) + (s - \alpha)^2}}$$

und nach einer Umformung des ersten Integrals der rechten Seite (wie in § 8) und bei Beachtung von Gl. (8)

$$\frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + F_n'} \varphi_3 (x_L - x) dx = -x_L \pi v_p^2 \sin \beta - (-x_L + 1/4) \cdot 1/2 v_p \int_{s_0}^s \frac{u(\alpha) d\alpha}{\sqrt{(s - \alpha) + (s - \alpha)^2}} \quad (43).$$

Setzen wir auch in Gl. (39)  $2b = 1$ , so erhalten wir entsprechend Gl. (38), (39), (43) und mit den Bezeichnungen des § 8:

$$r_\tau P_\tau = -x_L P_b + (-x_L + 1/4) A \dots \dots \dots (44).$$

Wir können uns also beim behandelten nichtstationären Problem der Flüssigkeitsbewegung um die ebene Platte die Kraftwirkung auf die Platte aus zwei Teilen bestehend denken:

1. der Kraft  $P_b$  Gl. (29), in jedem Augenblick im Mittelpunkt der Platte angreifend;
2. der Kraft  $A$  Gl. (32), in jedem Augenblick auf  $1/4$  der Plattenbreite  $2b$  von vorn angreifend.

**11. Drehbewegung einer Platte.** Wir behandeln anhangsweise folgendes Problem: die ebene Platte von der Breite  $2b = 1$  bewege sich mit zeitlich nach Größe und Richtung veränderlicher Geschwindigkeit durch die Flüssigkeit und drehe sich gleichzeitig mit zeitlich veränderlicher Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Die Flüssigkeit im Unendlichen sei in Ruhe ( $v_\infty = 0$ ). Wir setzen ferner voraus, daß der Anstellwinkel der Platte, die Änderungen der Bewegungsrichtung der Platte und die Winkelgeschwindigkeit der Platte im ganzen Verlauf des Bewegungsvorganges sehr (unendlich) klein sind.

Wir bezeichnen mit  $M$  den Mittelpunkt der Platte; mit  $P_v$  ist der Punkt, der in der Mitte zwischen  $M$  und der Vorderkante liegt, mit  $P_h$  der Punkt, der in der Mitte zwischen  $M$  und der Hinterkante liegt, bezeichnet. Wir bezeichnen ferner (aus später ersichtlichen Gründen) mit  $v_p$  die im allgemeinen nach Größe und Richtung zeitlich veränderliche Geschwindigkeit des Punktes  $P_h$  (nicht die des Punktes  $M$ ). Wir können dann jede beliebige Bewegung der Platte in jedem Augenblick darstellen durch:

1. eine Translation der Platte mit der Geschwindigkeit  $v_p$ ,
2. eine Drehung der Platte um den Punkt  $P_h$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

Den (Anstell-) Winkel zwischen der Richtung von  $v_p$  und der Richtung der Platte bezeichnen wir mit  $\beta$ .

Bei der nichtstationären Flüssigkeitsbewegung um die so bewegte Platte löst sich (im allgemeinen) eine Unstetigkeitsfläche von der Hinterkante der Platte ab; diese Unstetigkeitsfläche berechnen wir wieder auf Grund der Bedingung, daß die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der Hinterkante in jedem Augenblick endlich ist. Zwecks Ausführung dieser Rechnung denken wir uns das Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit in jedem Augenblick durch Ueberlagerung der beiden Geschwindigkeitsfelder I und II dargestellt:

- I nennen wir das Geschwindigkeitsfeld, das der Translation der Platte mit der Geschwindigkeit  $v_p$  und dem Vorhandensein der Unstetigkeitsfläche und der Zirkulation um die Platte entspricht;  
 II nennen wir das Geschwindigkeitsfeld, das bei stetiger, zirkulations- und drehungsfreier Bewegung der Flüssigkeit der Drehung der Platte um den Punkt  $P_h$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  entspricht.

Es läßt sich nun beweisen, daß das Geschwindigkeitsfeld II bei jedem beliebigen  $\omega$  endliche Geschwindigkeit an der Hinterkante besitzt<sup>1)</sup> (bei Drehung der Platte um jeden andern Punkt ist die Geschwindigkeit an der Hinterkante unendlich groß). Da das Geschwindigkeitsfeld II in jedem Augenblick endliche Geschwindigkeit an der Hinterkante besitzt, so muß (wenn das durch die Ueberlagerung der beiden Geschwindigkeitsfelder I und II entstehende Geschwindigkeitsfeld in jedem Augenblick endliche Geschwindigkeit an der Hinterkante haben soll) auch das Geschwindigkeitsfeld I in jedem Augenblick endliche Geschwindigkeit an der Hinterkante besitzen. Dies ist aber dann (und nur dann) der Fall, wenn Gl (8) gilt.

Bei Translation und gleichzeitiger Drehung der Platte berechnet sich also die Größe der Unstetigkeit  $u(\alpha)$  der entstehenden Unstetigkeitsfläche aus der Gleichung

$$v_p \sin \beta = 1/\pi \int_{s_0}^s \frac{\sqrt{1+s-\alpha}}{\sqrt{s-\alpha}} u(\alpha) d\alpha,$$

wobei  $v_p$  und  $\beta$  die zu Beginn des § 11 angegebene Bedeutung haben. Die übrigen Bezeichnungen sind vom § 2 übernommen.

Die bei dieser Flüssigkeitsbewegung auf die Platte wirkenden Kräfte und Momente bestimmen wir wieder nach Gl. (24) und Gl. (37). Wir zerlegen das Potential  $\varphi$  der um die Platte bestehenden Strömung in die beiden Potentiale  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ ; also  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ . Und zwar bezeichne  $\varphi_1$  das Potential der stetigen, zirkulations- und drehungsfreien Flüssigkeitsbewegung um die mit der Geschwindigkeit  $v_p$  bewegte und sich gleichzeitig mit  $\omega$  um den Punkt  $P_h$  drehende Platte;  $\varphi_2$  bezeichne das Potential der Strömung, die bei ruhender Platte dem Vorhandensein der Unstetigkeitsfläche und der Zirkulation um die Platte entspricht.

Die Beiträge von 
$$\frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + F_n'} \varphi_2 dx \quad \text{und} \quad \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + F_n'} \varphi_2 x dx$$

werden durch Gl. (32) und Gl. (43) gegeben.

Da  $\varphi_1$  bekannt ist<sup>2)</sup>, wollen wir hier von der Durchführung der Berechnung und der Angabe von

$$\frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + F_n'} \varphi_1 dx \quad \text{und} \quad \frac{D}{Dt} \int_{F_\tau + F_n'} \varphi_1 x dx$$

im einzelnen absehen.

Das Resultat läßt sich am einfachsten in folgender Weise angeben:

Bei der behandelten Flüssigkeitsbewegung können wir uns die Kraftwirkung auf die Platte aus folgenden Teilen bestehend denken:

1. einer in  $P_v$  angreifenden Kraft von der Größe

$$+ \pi \rho v_p^2 \sin \beta - 1/2 \rho v_p \int_{s_0}^s \frac{u(\alpha) d(\alpha)}{\sqrt{(s-\alpha) + (s-\alpha)^2}};$$

2. einer in  $M$  angreifenden Kraft von der Größe  $+ 1/4 \pi \rho \frac{d(v_p \sin \beta)}{dt}$ ;

3. einer in der Mitte zwischen  $M$  und  $P_v$  angreifenden Kraft von der Größe  $- 1/16 \pi \rho \frac{d\omega}{dt}$ ;

4. einem Drehmoment  $- 1/16 \pi \rho v_p \omega$ .

$v_p$  und  $\beta$  haben die zu Beginn des § 11 angegebene Bedeutung. Den Drehsinn von  $\omega$  haben wir so gewählt, daß ein positives  $\omega$  ein positives  $\beta$  vergrößert. 437

<sup>1)</sup> Da das Geschwindigkeitsfeld II bekannt ist (vergl. Lamb, l. c. S. 107), sei der leicht zu führende Beweis hier übergangen.

<sup>2)</sup> Vergl. Lamb, l. c. S. 107.